

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА**

**МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
до самостійної роботи і виконання
розрахунково-графічної та практичної роботи**

з дисципліни

«ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ»

*(для студентів 2 курсу денної форми навчання
освітнього рівня «бакалавр» спеціальності
126 – Інформаційні системи та технології)*

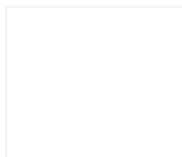
Харків – ХНУМГ ім. О. М. Бекетова – 2018

Методичні рекомендації до самостійної роботи і виконання розрахунково-графічної та практичної роботи з дисципліни «Оптимізаційні методи та моделі» (для студентів 2 курсу денної форми навчання освітнього рівня «бакалавр», спеціальності 126 – Інформаційні системи та технології) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова; уклад. : О. М. Штельма, Н. В. Макогон. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2018. – 29 с.

Укладачі: О. М. Штельма,
Н. В. Макогон

Рецензент канд. фіз.-мат. наук, доцент О. Б. Костенко

Рекомендовано кафедрою прикладної математики та інформаційних технологій, протокол № 1 від 31.08.2015.



Зміст

| | |
|---|----|
| Безумовна оптимізація. Ітераційні методи | |
| безумовної оптимізації | 4 |
| Метод найшвидшого спуску | 4 |
| Метод Ньютона..... | 6 |
| Метод покоординатного спуску..... | 7 |
| Умовна оптимізація. Багатовимірні задачі з | |
| обмеженнями у вигляді рівностей | 9 |
| Метод підстановки..... | 10 |
| Метод Лагранжа..... | 10 |
| Умовна оптимізація. Багатовимірні задачі | |
| при двобічних обмеженнях змінних | 14 |
| Диференціальний алгоритм..... | 14 |
| Індивідуальні завдання | 16 |
| Індивідуальне завдання з теми «Безумовна оптимізація. | |
| Ітераційні методи безумовної оптимізації» | 16 |
| Індивідуальні завдання з теми «Багатовимірні оптимізаційні | |
| задачі з обмеженнями у вигляді рівностей» | 20 |
| Індивідуальні завдання з теми «Багатовимірні задачі при двобічних | |
| обмеженнях змінних» | 23 |
| Список джерел | 29 |

Безумовна оптимізація.

Ітераційні методи безумовної оптимізації

Прямими методами вирішують задачу оптимізації шляхом ітераційного наближення до точки мінімуму. Розв'язок отримують наближеним, але із забезпеченням наперед заданої точності. На відміну від класичних існує відносно багато прямих методів.

Метод найшвидшого спуску

При мінімізації функцій багатьох змінних прямими методами основним рекурентним співвідношенням, яке зв'язує нову точку наближення до мінімуму з попередньою, є

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} + \lambda^{(k)} \Delta \bar{x}^{(k)}, \quad (1)$$

де $\Delta \bar{x}^{(k)}$ - напрямний вектор на k -му кроці, $\lambda^{(k)}$ - значення k -го кроку.

Процес мінімізації припиняється при досягненні заданої точності обчислень:

$$\left| \left(\frac{\partial y}{\partial x_j} \right)^{(k)} \right| \leq \varepsilon, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Для методу найшвидшого спуску

$$\Delta \bar{x}^{(k)} = - \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}} \right)^{(k)}, \quad (3)$$

а величина (значення) кроку $\lambda^{(k)}$ визначається як рішення задачі одновимірної мінімізації функції

$$y(\lambda^{(k)}) = y(\bar{x}^{(k)}) - \lambda \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}} \right)^{(k)}, \quad (4)$$

Приклад 1. Визначити мінімум функції

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_1 x_2 \rightarrow \min_{\bar{x} \in R^n}$$

з заданою точністю обчислень $\varepsilon = 0.15$, прийнявши замість початкового наближення точку $\bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 2.7 \\ 2.5 \end{bmatrix}$. Розв'язати задачу методом найшвидшого спуску.

Розв'язання.

1-й крок мінімізації. Початкова точка задана : $\bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 2.7 \\ 2.5 \end{bmatrix}$. Визначимо в даній точці значення функції, яке буде потрібним для контролю процесу мінімізації:

$$y(\bar{x}^{(0)}) = -5,192.$$

Визначимо напрямний вектор першого кроку:

$$\Delta \bar{x}^{(0)} = -\left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\right)^{(0)} = \begin{bmatrix} 3(x_1^{(0)})^2 - 6x_2^{(0)} \\ 3(x_2^{(0)})^2 - 6x_1^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,87 \\ 2,55 \end{bmatrix}.$$

Знайдемо $\lambda^{(0)}$ як рішення задачі:

$$y\left(\bar{x}^{(0)} - \lambda^{(0)}\left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\right)^{(0)}\right) = (2,7 - 6,87\lambda^{(0)})^3 + (2,5 - 2,55\lambda^{(0)})^3 - \\ - 6(2,7 - 6,87\lambda^{(0)})(2,5 - 2,55\lambda^{(0)}) \rightarrow \min_{\lambda^{(0)} \rightarrow R},$$

або (після спрощення)

$$y(\lambda^{(0)}) = -340,8241(\lambda^{(0)})^3 + 325,9527(\lambda^{(0)})^2 - 53,699\lambda^{(0)} - 5,192.$$

Розв'яжемо дану задачу методом Ейлера. З рівняння

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda^{(0)}}\right) = -1022,4723(\lambda^{(0)})^2 + 651,9054\lambda^{(0)} - 53,6994 = 0 \text{ визначимо стаціонарні точки:}$$

$$\lambda_{1,2}^{(0)} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \begin{cases} \lambda_1^{(0)} = 0,5404; \\ \lambda_2^{(0)} = 0,0972. \end{cases}$$

Досліджуємо стаціонарні точки:

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial (\lambda^{(0)})^2}\right) = -2044,9446 \cdot \lambda^{(0)} + 651,9054 = \begin{cases} -453,1826 \text{ при } \lambda_1^{(0)} = 0,5404; \\ 453,1368 \text{ при } \lambda_2^{(0)} = 0,0972. \end{cases}$$

Згідно з критерієм Сільвестра $\lambda_1^{(0)}$ відповідає максимуму функції $y(\lambda^{(0)})$, а $\lambda_2^{(0)}$ - мінімуму. Нова точка наближення відповідно з (17):

$$\bar{x}^{(1)} = \bar{x}^{(0)} - \lambda_2^{(0)} \Delta \bar{x} = \begin{bmatrix} 2,7 \\ 2,5 \end{bmatrix} - 0,0972 \begin{bmatrix} 6,87 \\ 2,55 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,0322 \\ 2,2521 \end{bmatrix}.$$

Значення $y(\bar{x}^{(1)}) = -7,6452 < y(\bar{x}^{(0)}) = -5,192$, що свідчить про вірний рух до точки мінімуму. Задана точність обчислень після першого кроку не досягнута:

$$\left|\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^{(1)}\right| = |-1,123| > \varepsilon \quad \left|\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^{(1)}\right| = |3,0227| > \varepsilon.$$

Потрібний наступний крок мінімізації. Процедура чергового кроку аналогічна процедурі попереднього кроку. Основні проміжні результати кожного кроку відбиті в таблиці.

| Номер шага | $\bar{x}^{(k)} =$ | | $y^{(k)}$ | $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{(k)}$ | | $\lambda^{(k)}$ | $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial \lambda^2}\right)^{(k)}$ |
|------------|-------------------|--------|-----------|--|--------|-----------------|--|
| 0 | 2,7 | 2,5 | -5.192 | 6.87 | 2.55 | 0.0972 | 453.1368 |
| 1 | 2.0322 | 2.2321 | -6.3862 | -1.123 | 3.0227 | 0.0595 | 170.2181 |
| 2 | 2.099 | 2.0724 | -7.9925 | 0.783 | 0.2905 | 0.119 | 5.6808 |
| 3 | 2.0058 | 2.0378 | -7.9925 | -0.1571 | 0.4232 | 0.0623 | 3.258 |
| 4 | 2.0156 | 2.0114 | -7.9988 | 0.1195 | 0.0436 | | |

Оскільки обидві складові $\left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\right)^{(4)}$ за абсолютним значенням перевершують

$$\varepsilon = 0.15, \text{ то } \bar{x}^* = \bar{x}^{(4)} = \begin{bmatrix} 2.0156 \\ 2.0114 \end{bmatrix}; \quad y^* = y(\bar{x}^{(4)}) = -7.9988.$$

Метод Ньютона

Приклад 2. Знайти мінімум функції цілі

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_1 x_2$$

методом Ньютона з точністю $\varepsilon = 0.05$, взяти за початкову точку наближення точку $\bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 2.4 \\ 2.3 \end{bmatrix}$.

Розв'язання. Для методу Ньютона напрямний вектор

$$\Delta \bar{x}^{(k)} = -\left(H^{(k)}\right)^{-1} \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\right)^{(k)}, \quad (5)$$

а величина кроку $\lambda^{(k)} = 1$.

1-й крок мінімізації. Визначимо перші й другі часткові похідні функції $y(\bar{x})$ у точці $\bar{x}^{(0)}$:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\right)^{(0)} = \begin{bmatrix} 3x_1^2 - 6x_2 \\ 3x_2^2 - 6x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.48 \\ 1.47 \end{bmatrix}; \quad \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\right)^{(0)} = 6 \cdot x_1^{(0)} = 14.4; \quad \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}\right)^{(0)} = 6 \cdot x_2^{(0)} = 13.8;$$
$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^{(0)} = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1}\right)^{(0)} = -6.$$

Звідки $H^{(0)} = \begin{bmatrix} 14.4 & -6 \\ -6 & 13.8 \end{bmatrix}$.

Обернену матрицю визначимо за допомогою жорданових виключень:

$$H^{(0)} = \begin{bmatrix} 14.4 & -6 \\ -6 & 13.8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0.0694 & 0.4169 \\ -0.4167 & 11.3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0.0848 & 0.0369 \\ 0.0369 & 0.0885 \end{bmatrix} = \left(H^{(0)}\right)^{-1}.$$

Відповідно (5)

$$\bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2.4 \\ 2.3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.0848 & 0.0369 \\ 0.0369 & 0.0885 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3.48 \\ 1.47 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0506 \\ 2.0415 \end{bmatrix}.$$

Для контролю процесу мінімізації треба порівняти значення функції в точках $\bar{x}^{(0)}$ та $\bar{x}^{(1)}$:

$$y^{(1)} = -7.9867 < y^{(0)} = -7.129.$$

Функція зменшується. Отже, має місце наближення до точки мінімуму. Але задана точність обчислень не досягнута, тому що складові вектору $\left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\right)^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.3671 \\ 0.1996 \end{bmatrix}$ за модулем перевершують величину ε . Потрібний наступний крок мінімізації.

2-й крок мінімізації. Зробивши обчислювальні операції аналогічні операціям першого кроку, одержимо:

$$\bar{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 2.0011 \\ 2.0010 \end{bmatrix}; \quad \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\right)^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.0072 \\ 0.0054 \end{bmatrix}.$$

З останнього рівняння виходить, що необхідна точність обчислень досягнута. А це означає, що $\bar{x}^* = \bar{x}^{(2)}$; $y^* = y(\bar{x}^{(2)}) = -7.9999$.

Метод покоординатного спуску

У методі покоординатного спуску, який ще зветься методом Гаусса-Зейделя, на кожному кроці змінюється тільки одна змінна. Тому рекурентне співвідношення між попередньою точкою наближення до мінімуму і наступною має вигляд

$$x_r^{(k+1)} = x_r^{(k)} + \lambda_r^{(k)} \Delta x_r^{(k)}, \quad (5.3)$$

де

$$\Delta x_r^{(k)} = -\left(\frac{\partial y}{\partial x_r}\right)^{(k)}, \quad \text{а} \quad \lambda_r^{(k)} = \frac{1}{\left|\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_r^2}\right)^{(k)}\right|}. \quad (6)$$

тобто

$$x_r^{(k+1)} = x_r^{(k)} - \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x_r}\right)^{(k)}}{\left|\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_r^2}\right)^{(k)}\right|}. \quad (7)$$

Зауважимо, що друга похідна обов'язково повинна братися за модулем, інакше при її від'ємному значенні процес мінімізації піде у зворотному напрямку.

Варіювання змінних здійснюють послідовно: спочатку – першу, потім – другу і т.д. Цикл, що складається з n послідовних кроків, створює одну ітерацію. Пошук мінімуму закінчують, як тільки на черговому кроці абсолютне значення усіх складових вектора перших часткових похідних функції цілі будуть менш, ніж задана точність обчислень

$$\left|\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^{(k)}\right| < \varepsilon, \quad i = \overline{1, n}. \quad (8)$$

Приклад 3.

Методом покоординатного спуску знайти мінімум функції цілі $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_1x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.12$, взяти за початкову точку наближення точку

$$\bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 2.4 \\ 2.3 \end{bmatrix}.$$

Розв'язання

Нульова ітерація:

$$\text{1-й крок.} \quad \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^{(0)} = 3.48 > \varepsilon; \quad \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\right)^{(0)} = 14.4$$

Нове значення змінної $x_1^{(1)}$ визначається відповідно до (7):

$$x_1^{(1)} = 2.4 - \frac{3.48}{14.4} = 2.1589.$$

Тепер формується нова проміжна точка $\bar{x}^{(1,0)} = \begin{bmatrix} 2.158 \\ 2.3 \end{bmatrix}$.

2-й крок. Нове значення змінної x_2 визначається також відповідно виразу (7). Треба пам'ятати, що до відповідних похідних підставляється нова проміжна точка $\bar{x}^{(1,0)}$.

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \right)^{(1,0)} = 2.92 > \varepsilon; \quad \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} \right)^{(1,0)} = 13.8; \quad x_2^{(1)} = 2.3 - \frac{2.92}{13.8} = 2.088.$$

У результаті нульової ітерації отримали точку $\bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2.158 \\ 2.088 \end{bmatrix}$.

Необхідно пересвідчитися у наближенні до точки мінімуму в результаті нульової ітерації: $y^{(1)} = -7.882 < -7.129 = y^{(0)}$.

Перевіримо виконання співвідношення (8)

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \right)^{(1)} = 1.442 > \varepsilon; \quad \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \right)^{(1)} = 0.131 > \varepsilon;$$

Співвідношення (8) не виконується. Тому переходимо до першої ітерації.

Перша ітерація:

$$1\text{-й крок. } \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \right)^{(1)} = 1.442 > \varepsilon; \quad \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} \right)^{(1)} = 12.948; \quad x_1^{(2)} = 2.158 - \frac{1.442}{12.948} = 2.047; \quad \bar{x}^{(2,1)} = \begin{bmatrix} 2.047 \\ 2.088 \end{bmatrix}.$$

$$2\text{-й крок. } \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \right)^{(2,1)} = 0.7972 > \varepsilon; \quad \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} \right)^{(2,1)} = 12.528; \quad x_2^{(2)} = 2.088 - \frac{0.7972}{12.528} = 2.0243.$$

У результаті першої ітерації отримаємо $\bar{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 2.047 \\ 2.0243 \end{bmatrix}$.

Треба пересвідчитися у наближенні до точки мінімуму в результаті першої ітерації: $y^{(2)} = -7.99004 < -7.882 = y^{(1)}$.

Перевіримо виконання співвідношення (8)

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \right)^{(2)} = 0.4248 > \varepsilon; \quad \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \right)^{(2)} = |-0.008| < \varepsilon;$$

Співвідношення (8) не виконується по змінній x_1 , переходимо до другої ітерації.

Друга ітерація:

$$1\text{-й крок. } \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \right)^{(2)} = 0.4248 > \varepsilon; \quad \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} \right)^{(2)} = 12.282; \quad x_1^{(3)} = 2.047 - \frac{0.4243}{12.282} = 2.0124; \quad \bar{x}^{(3,2)} = \begin{bmatrix} 2.0124 \\ 2.0243 \end{bmatrix}.$$

$$2\text{-й крок. } \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \right)^{(3,2)} = 0.219 > \varepsilon; \quad \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} \right)^{(3,2)} = 12.1458; \quad x_2^{(3)} = 2.0243 - \frac{0.219}{12.1458} = 2.0061; \quad \bar{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 2.0124 \\ 2.0061 \end{bmatrix};$$

$$y^{(3)} = -7.9993 < -7.9904 = y^{(2)}.$$

Перевіримо виконання співвідношення (8)

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^{(3)} = 0.113 < \varepsilon; \quad \left|\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^{(3)}\right| = |-0.001| < \varepsilon;$$

Співвідношення (8) виконується.

$$\bar{x}^* = \begin{bmatrix} 2.0124 \\ 2.0061 \end{bmatrix}; \quad y^* = -7.9993$$

Умовна оптимізація. Багатовимірні задачі з обмеженнями у вигляді рівностей

Математична модель багатовимірної оптимізаційної задачі з обмеженнями у вигляді рівностей має вигляд

$$y(\bar{x}) \rightarrow \underset{\bar{x} \in \Omega}{opt} \quad \Omega: f_i(\bar{x}) = 0, \quad i = \overline{1, m, n}$$

Розгляд цієї теми ґрунтується на концепції залежних й незалежних змінних, що полягає у розбитті усіх змінних задачі на два підвектори: $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{s} \\ \bar{t} \end{bmatrix}$, де \bar{s} – підвектор залежних змінних; \bar{t} – підвектор незалежних змінних.

Необхідні умови локального умовного оптимуму мають вигляд

$$\boxed{\begin{pmatrix} \delta y \\ \delta \bar{t} \end{pmatrix}^* = 0}, \quad \text{де} \quad \begin{pmatrix} \delta y \\ \delta \bar{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial y \\ \partial \bar{t} \end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix} \partial y \\ \partial \bar{s} \end{pmatrix}^T (\mathbf{W})^{-1} \mathbf{C};$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \frac{\partial f_1}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial s_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s_1} & \frac{\partial f_2}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial s_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial s_1} & \frac{\partial f_m}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial s_m} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t_1} & \frac{\partial f_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial t_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial t_1} & \frac{\partial f_2}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial t_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial t_1} & \frac{\partial f_m}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial t_p} \end{bmatrix}.$$

Достатні умови точки локального мінімуму полягають у додатній визначеності в точці локального мінімуму матриці других умовних похідних функції цілі $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \delta^2 y \\ \delta t_i \delta t_j \end{bmatrix}$.

Матриця має розмір $(p \times p)$ і визначається за формулою

$$\mathbf{S} = \mathbf{P}_{tt} - \mathbf{P}_{ts} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{C} - (\mathbf{P}_{ts} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{C})^T + (\mathbf{W}^{-1} \mathbf{C})^T \mathbf{P}_{ss} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{C},$$

де \mathbf{W}^{-1} , \mathbf{C} – вже знайомі обернена матриця Якобі і матриця управління;
 \mathbf{P}_{tt} , \mathbf{P}_{ts} , \mathbf{P}_{ss} – підматриці матриці

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{ss} & \mathbf{P}_{st} \\ \mathbf{P}_{ts} & \mathbf{P}_{tt} \end{bmatrix} = \mathbf{H} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{H}_i.$$

Тут \mathbf{H} – вже знайома матриця других похідних функції цілі; \mathbf{H}_i – матриця других похідних i -го обмеження задачі, визначається як

$$\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}, \quad i = \overline{1, m};$$

λ_i – коефіцієнти чутливості, складові вектора $\bar{\lambda}^T = \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{s}} \right)^T \mathbf{W}^{-1}$.

Метод підстановки

Приклад 4. Методом підстановки розв'язати задачу мінімізації функції

$$y(\bar{x}) = 2x_1^2 - \frac{x_3}{x_2} \rightarrow \min_{\bar{x} \in \Omega};$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1^2 \cdot x_2 - 1 = 0; \\ x_1 \cdot x_3 - 2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Дану задачу можна розв'язувати методом підстановки, оскільки обмеження на змінні задачі дозволяють легко виразити m залежних змінних ($m=2$) через залишені p незалежних змінних ($p=1$):

$$x_2 = \frac{1}{x_1^2}; \quad x_3 = \frac{2}{x_1};$$

Необхідно підставити у функцію $y(\bar{x})$ замість залежних змінних x_2, x_3 їх вираз через незалежну змінну x_1 , ми зведемо задачу мінімізації з обмеженнями до задачі безумовної мінімізації функції:

$$y(x_1) = 2x_1^2 - 2x_1 \rightarrow \min_{x_1 \in R^1}.$$

Розв'язуючи цю задачу методом Ейлера, отримаємо:

$$\bar{x}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 4 & 4 \end{bmatrix}; \quad y^* = -\frac{1}{2}.$$

Метод Лагранжа

Цей метод полягає у заміні функції цілі функцією Лагранжа і подальшому визначенні її стаціонарних точок, що співпадають з стаціонарними точками початкової функції цілі.

Спочатку побудуємо функцію Лагранжа:

$$L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = y(\bar{x}) - \bar{\lambda}^T \cdot \bar{f}(\bar{x}), \quad (9)$$

де $\bar{\lambda}$ - вектор коефіцієнтів чутливості або невизначених множників Лагранжа.

Далі розв'язання задачі полягає у визначенні стаціонарних точок функції Лагранжа, при цьому $\bar{\lambda}$ розглядається як вектор додаткових змінних, а сама

функція Лагранжа як функція без обмежень. Стаціонарні точки функції Лагранжа визначаються як рішення системи рівнянь:

$$\begin{cases} \partial L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0; \\ \frac{\partial L(\bar{x}, \bar{\lambda})}{\partial \bar{\lambda}} = -\bar{f}(\bar{x}) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Приклад 5. Методом Лагранжа знайти екстремум функції

$$y(\bar{x}) = 2x_1^2 - \frac{x_3}{x_2} \rightarrow \min_{\bar{x} \in \Omega};$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1^2 \cdot x_2 - 1 = 0; \\ x_1 \cdot x_3 - 2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання: Спочатку побудуємо функцію Лагранжа:

Для нашого прикладу функція Лагранжа має вигляд

$$\partial L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 2x_1^2 - \frac{x_3}{x_2} - \lambda_1(x_1^2 x_2 - 1) - \lambda_2(x_1 x_3 - 2),$$

а сама система рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} 4x_1 - \lambda_1 \cdot 2x_1 x_2 - \lambda_2 x_3 = 0; \\ \frac{x_3}{x_2^2} - \lambda_1 x_1^2 = 0; \\ -\frac{1}{x_2} - \lambda_2 x_1 = 0; \\ x_1^2 x_2 - 1 = 0; \\ x_1 x_3 - 2 = 0. \end{cases}$$

Звідки знаходимо стаціонарну точку $\bar{x}^{(0)'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 4 & 4 \end{bmatrix}$

Приклад 6. Знайти стаціонарні точки функції у задачі

$$y(\bar{x}) = 2x_1^2 - \frac{x_3}{x_2} \rightarrow \min_{\bar{x} \in \Omega};$$

$$\Omega: \begin{cases} f_1 = x_1^2 x_2 - 1 = 0; \\ f_2 = x_1 x_3 - 2 = 0, \end{cases}$$

використовуючи метод Якобі.

Розв'язання: Стаціонарні точки функції $y(\bar{x})$ від n змінних з накладеними на змінні обмеженнями

$$f_i(\bar{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (11)$$

визначаються методом Якобі як сумісне рішення системи рівнянь:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \bar{t}} \right)' = \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{t}} \right)' - \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{s}} \right)' \cdot W^{-1} \cdot C \quad (12)$$

з системою (11). У системі рівнянь (12) \bar{t} - вектор незалежних змінних; \bar{s} - вектор залежних змінних.

Виберемо в умовах прикладу які залежні змінні x_2 і x_3 , яка незалежна змінна – x_1 . Знайдемо вектор умовних похідних за незалежними змінними відповідно (12):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{t}} \right)' &= \frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial y}{\partial x_1} - \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_2} & \frac{\partial y}{\partial x_3} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \end{bmatrix} = \\ &= 4x_1 - \begin{bmatrix} \frac{x_3}{x_2^2} & \frac{-1}{x_2} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x_1^2 & 0 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2x_1x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \\ &= 4x_1 - \begin{bmatrix} \frac{x_3}{x_2^2} & \frac{-1}{x_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2x_1x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 4x_1 - \frac{x_3}{x_1x_2}. \end{aligned}$$

Складемо для даного прикладу систему рівнянь типу (9)-(10):

$$\begin{cases} 4x_1 - \frac{x_3}{x_1x_2} = 0; \\ x_1^2x_2 - 1 = 0; \\ x_1x_3 - 2 = 0. \end{cases}$$

Її розв'язок $\bar{x}^{(0)'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 4 & 4 \end{bmatrix}$ є шуканою стаціонарною точкою.

Приклад 7. Довести, що стаціонарна точка $\bar{x}^{(0)'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 4 & 4 \end{bmatrix}$ у прикладах 5, 6 є точкою локального мінімуму : $\bar{x}^{(0)'} = \bar{x}^*$.

Розв'язання: Стаціонарна точка функції $y(\bar{x})$ з обмеженнями на зміні $\bar{f}(\bar{x})=0$ є точкою локального мінімуму, якщо матриця додатно визначена.

$$S = P_{tt} - P_{ts} \cdot W^{-1} \cdot C - (P_{ts} \cdot W^{-1} \cdot C)' + (W^{-1} \cdot C)' P_{ss} \cdot W^{-1} \cdot C \quad (13)$$

У виразі (13) P_{tt} , P_{ts} , P_{ss} підматриці матриці

$$P = \begin{bmatrix} P_{ss} & P_{st} \\ P_{ts} & P_{tt} \end{bmatrix} = H_0 - \sum_{j=1}^m \lambda_j H_j,$$

де \bar{s} - вектор залежних змінних; \bar{t} - вектор незалежних змінних; H_0 - матриця Гесса; λ_j - складова вектора $\bar{\lambda} = \left(-\frac{\partial y}{\partial \bar{s}} \right)' \cdot W^{-1}$; H_j - матриця других похідних функції $f_j(\bar{x})$.

Для розглянутого прикладу

$$\bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 4 & 4 \end{bmatrix}; \quad \bar{t} = [x_1]; \quad \bar{s} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; \quad W^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{s}} \right) = \begin{bmatrix} \frac{x_3}{x_2^2} \\ -\frac{1}{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix};$$

$$\bar{\lambda} = [\lambda_1 \quad \lambda_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix};$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = 4; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = -\frac{2x_3}{x_2^3}; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_3} = 0; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_3 \partial x_2} = \frac{1}{x_2^2};$$

$$H_0 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2x_3}{x_2^3} & \frac{1}{x_2^2} \\ 0 & \frac{1}{x_2^2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{16} & 0 \end{bmatrix};$$

оскільки

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} \right)^{(0)} = 4; \quad \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} \right)^{(0)} = -\frac{1}{8}; \quad \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2} \right)^{(0)} = 0;$$

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^{(0)} = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_3} \right)^{(0)} = 0; \quad \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_3} \right)^{(0)} = \frac{1}{16}.$$

Знайдемо матриці H_1 та H_2 . Для цього візьмемо другі похідні функцій обмежень.

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} = 2x_2; \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_3^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} = 2x_1;$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial x_3} = 0; \quad H_1 = \begin{bmatrix} 2x_2 & 2x_1 & 0 \\ 2x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_3} = 0; \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_3} = 1;$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 2x_1 x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix};$$

$$S = -4 - \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \right)^{-1} + \left(\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 > 0.$$

Отже, $\bar{x}^{(0)*} = \bar{x}^*$.

Умовна оптимізація. Багатовимірні задачі при двобічних обмеженнях змінних

Диференціальний алгоритм

Приклад 8. За допомогою диференціального алгоритму розв'язати задачу мінімізації функції

$$y(\bar{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 \rightarrow \min_{\bar{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{bmatrix} -12 \\ -20 \end{bmatrix} \leq \bar{x} \leq \begin{bmatrix} 15 \\ 5 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислень $\varepsilon = 0.5$ і початковою точкою наближення $\bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Розв'язання. Для розв'язання даної задачі треба скористатися диференціальним алгоритмом - методом покоординатного спуску, узагальненим на випадок двобічної обмеженості змінних.

Метод являє собою ітераційний процес. На кожному кроці k -й ітерації перевіряється порушення необхідних умов. Можливі два випадки порушення необхідних умов:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \right)^{(k)} > 0 \quad \text{при} \quad x_r^{(k)} > x_r^+ \quad (14)$$

або

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \right)^{(k)} < 0 \quad \text{при} \quad x_r^{(k)} < x_r^{++} \quad (15)$$

При порушенні (14) $\Delta x_r < 0$, і величина приросту змінної x_r визначається виразом

$$\Delta x_r = \max_{\Delta x_r < 0} \left[x_r^+ - x_r^{(k)}; -\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x_r} \right)^{(k)}}{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_r^2} \right)^{(k)}} \right]; \quad (16)$$

При порушенні (15)- виразом

$$\Delta x_r = \min_{\Delta x_r > 0} \left[x_r^{++} - x_r^{(k)}; -\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x_r} \right)^{(k)}}{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_r^2} \right)^{(k)}} \right]; \quad (17)$$

Розв'язання прикладу 8 являє собою послідовність ітерацій.

Нульова ітерація:

1-й крок. У початковій точці $\bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$; $y^{(0)} = 13$ (задана точність за змінною x_1

ще не досягнена): $\left| \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \right)^{(0)} \right| = 2x_1 + 2x_2 = 6 > \varepsilon$. Оскільки $x_1^{(0)} > x_1^+$ і $\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \right)^{(0)} > 0$, приріст

змінної обчислюється за допомогою виразу (30): $\Delta x_1^{(0)} = \max_{\Delta x_1 < 0} \left[-12 - 1; -\frac{6}{2} \right] = -3$.

Нове значення змінної $x_1^{(1)}$ буде рівним $x_1^{(1)} = x_1^{(0)} + \Delta x_1^{(0)} = 1 - 3 = -2$.

Проміжна точка $\bar{x}^{(1,0)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$;

2-й крок $\left| \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \right)^{(1,0)} \right| = 4x_2 + 2x_1 = 4 > \varepsilon$;

$$\Delta x_2^{(0)} = \max_{\Delta x_2 < 0} \left[-20 - 2; -\frac{4}{4} \right] = -1; \quad x_2^{(1)} = 2 - 1 = 1.$$

Нове значення функції у точці $\bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ свідчить, що напрям руху до точки мінімуму обрано вірно: $y^{(1)} = 2 < y^{(0)} = 13$.

Перша ітерація:

$$\left| \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \right)^{(1)} \right| = |-2| > \varepsilon; \quad \Delta x_1^{(1)} = \min_{\Delta x_1 > 0} \left[15 - (-2); -\frac{-2}{2} \right] = 1; \quad x_1^{(2)} = x_1^{(1)} + \Delta x_1^{(1)} = -2 + 1 = -1;$$

$$\bar{x}^{(2,1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \left| \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \right)^{(2,1)} \right| = 2 > \varepsilon; \quad \Delta x_2^{(1)} = \max_{\Delta x_2 < 0} \left[-20 - 1; -\frac{2}{4} \right] = -0,5;$$

$$x_2^{(2)} = x_2^{(1)} + \Delta x_2^{(1)} = 1 - 0,5 = 0,5; \quad \bar{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0,5 \end{bmatrix} \quad y^{(2)} = 0,5 < y^{(1)} = 2.$$

Друга ітерація:

$$\left| \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \right)^{(2)} \right| = |-1| > \varepsilon; \quad \Delta x_1^{(2)} = \min_{\Delta x_1 > 0} \left[15 - (-1); -\frac{-1}{2} \right] = 0,5; \quad x_1^{(3)} = x_1^{(2)} + \Delta x_1^{(2)} = -1 + 0,5 = -0,5;$$

$$\bar{x}^{(3,2)} = \begin{bmatrix} -0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} \quad \left| \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \right)^{(3,2)} \right| = 1 > \varepsilon; \quad \Delta x_2^{(2)} = \max_{\Delta x_2 < 0} \left[-20 - 0,5; -\frac{1}{4} \right] = -0,25;$$

$$x_2^{(3)} = x_2^{(2)} + \Delta x_2^{(2)} = 0,5 - 0,25 = 0,25; \quad \bar{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} -0,5 \\ 0,25 \end{bmatrix} \quad y^{(3)} = 0,125 < y^{(2)} = 0,5.$$

Третя ітерація:

$$\left| \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \right)^{(3)} \right| = |-0,5| = \varepsilon; \quad \left| \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \right)^{(3)} \right| = 0.$$

Необхідні умови додержуються заданої точності, отже, треба перевірити достатні: якщо матриця других похідних для обох змінних додатно визначена, тоді $\bar{x}^{(3)}$ є точкою мінімуму.

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}; \quad \Delta_1 = 2 > 0; \quad \Delta_2 = 8 - 4 = 4 > 0.$$

Отже мінімум знайдено: $\bar{x}^* = \begin{bmatrix} -0,5 \\ 0,25 \end{bmatrix}$; $y^* = y^{(3)} = 0,125$.

Індивідуальні завдання

Індивідуальне завдання з теми «Безумовна оптимізація».

Ітераційні методи безумовної оптимізації»

Варіант № 1

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = 2x_1^3 + x_1x_2^2 + 5x_1^2 + x_2^2$ з точністю $\varepsilon = 0.01$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)} = [0,3 \ 0,3]$.

Варіант № 2

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = 2x_1^3 + x_1x_2^2 + 5x_1^2 + x_2^2$ з точністю $\varepsilon = 0.01$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)} = [0,2 \ 0,1]$.

Варіант № 3

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = 2x_1^3 + x_1x_2^2 + 5x_1^2 + x_2^2$ з точністю $\varepsilon = 0.02$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)} = [0,3 \ 0,2]$.

Варіант № 4

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = 2x_1^3 + x_1x_2^2 + 5x_1^2 + x_2^2$ з точністю $\varepsilon = 0.01$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)} = [0,1 \ 0,3]$.

Варіант № 5

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = 2x_1^3 + x_1x_2^2 + 5x_1^2 + x_2^2$ з точністю $\varepsilon = 0.002$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)} = [0,2 \ 0,2]$.

Варіант № 6

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.1$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)} = [0,9 \ 0,8]$.

Варіант № 7

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.1$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)} = [1,1 \ 1,2]$.

Варіант № 8

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.1$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)} = [1,3 \quad 1,1]$.

Варіант № 9

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.1$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)} = [0,7 \quad 0,8]$.

Варіант № 10

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.1$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)} = [0,8 \quad 0,8]$.

Варіант № 11

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 3x_1 + 2x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.02$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)} = [0,9 \quad 0,1]$.

Варіант № 12

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 3x_1 + 2x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.05$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)} = [1,1 \quad 0,2]$.

Варіант № 13

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 3x_1 + 2x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.1$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)} = [0,8 \quad 0,2]$.

Варіант № 14

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 3x_1 + 2x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.01$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)} = [1,2 \quad -0,1]$.

Варіант № 15

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 3x_1 + 2x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.1$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)} = [1, 2 \quad 0, 3]$.

Варіант № 16

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_1x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.1$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)} = [1, 8 \quad 1, 8]$.

Варіант № 17

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_1x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.1$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)} = [1, 9 \quad 1, 8]$.

Варіант № 18

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_1x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.05$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)} = [1, 7 \quad 1, 9]$.

Варіант № 19

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_1x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.05$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)} = [2, 1 \quad 1, 9]$.

Варіант № 20

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_1x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.1$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)} = [2, 1 \quad 2, 2]$.

Варіант № 21

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 9x_1x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.1$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)} = [2, 8 \quad 2, 9]$.

Варіант № 22

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 9x_1x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.2$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)} = [2, 8 \quad 3, 1]$.

Варіант № 23

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 9x_1x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.2$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)} = [3, 2 \quad 2, 8]$.

Варіант № 24

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 9x_1x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.1$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)} = [3, 1 \quad 3, 1]$.

Варіант № 25

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 9x_1x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.4$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)} = [2, 9 \quad 3, 2]$.

Варіант № 26

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 12x_1x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.2$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)} = [4, 1 \quad 3, 8]$.

Варіант № 27

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 12x_1x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.2$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)} = [4, 1 \quad 3, 7]$.

Варіант № 28

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 12x_1x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.2$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)} = [3, 9 \quad 4, 1]$.

Варіант № 29

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 12x_1x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.2$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)} = [3, 7 \quad 4, 2]$.

Варіант № 30

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 12x_1x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.2$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)} = [3, 8 \quad 3, 8]$.

Індивідуальні завдання з теми «Багатовимірні оптимізаційні задачі з обмеженнями у вигляді рівностей»

Варіант № 1

Методом підстановки знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_3 \rightarrow \min_{x \in \Omega}, \quad \Omega: f_1 = x_3 - x_1x_2 = 0$$

Варіант № 2

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = x_2^2 + 2x_1x_3 - x_1 \rightarrow \min_{x \in \Omega}, \quad \Omega: \begin{cases} f_1 = x_1 + x_2 - 8 = 0 \\ f_2 = x_2 - x_3 - 4 = 0 \end{cases}$$

Варіант № 3

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = \frac{3}{x_1^2} + \frac{3}{x_2^2} + 6x_3 \rightarrow \min_{x \in \Omega}, \quad \Omega: f_1 = x_3 - x_1x_2 = 0$$

Варіант № 4

Методом підстановки знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 + 9x_3 \rightarrow \min_{x \in \Omega}, \quad \Omega: f_1 = x_1x_2x_3 - 1 = 0$$

Варіант № 5

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = x_1x_2 \rightarrow \min_{x \in \Omega}, \quad \Omega: f_1 = 2x_1 + 3x_2 - 5 = 0$$

Варіант № 6

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_3 \rightarrow \min_{x \in \Omega}, \quad \Omega: \begin{cases} f_1 = x_1 + x_2 - 3 = 0 \\ f_2 = x_2 + x_3 - 1 = 0 \end{cases}$$

Варіант № 7

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = x_1x_2x_3 \rightarrow \min_{x \in \Omega}, \quad \Omega: f_1 = x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0$$

Варіант № 8

Методом підстановки знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + 2x_3 \rightarrow \min_{x \in \Omega}, \quad \Omega: f_1 = x_3 - x_1x_2 = 0$$

Варіант № 9

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_3 \rightarrow \min_{x \in \Omega}, \quad \Omega: f_1 = x_3 - x_1x_2 = 0$$

Варіант № 10

Методом підстановки знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = x_1^2 + x_3^2 - x_1 - 2x_2 \rightarrow \min_{\bar{x} \in \Omega}, \\ \Omega: f_1 = x_1 + 2x_2 + x_3 - 6 = 0$$

Варіант № 11

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_3 \rightarrow \min_{x \in \Omega}, \quad \Omega: f_1 = x_3 - x_1x_2 = 0$$

Варіант № 12

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 9x_3 \rightarrow \min_{x \in \Omega}, \quad \Omega: f_1 = x_3 - x_1x_2 = 0$$

Варіант № 13

Методом підстановки знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = \frac{36}{x_1} + \frac{9}{x_2} + x_3 \rightarrow \min_{x \in \Omega}, \quad \Omega: f_1 = x_3 - \sqrt{x_1x_2} = 0$$

Варіант № 14

Методом підстановки знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = \frac{2}{x_1^4} + \frac{2}{x_2^4} + x_3 \rightarrow \min_{x \in \Omega}, \quad \Omega: f_1 = x_3 - x_1x_2 = 0$$

Варіант № 15

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 15x_3 \rightarrow \min_{x \in \Omega}, \quad \Omega: f_1 = x_3 - x_1x_2 = 0$$

Варіант № 16

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 21x_3 \rightarrow \min_{x \in \Omega}, \quad \Omega: f_1 = x_3 - x_1x_2 + 5 = 0$$

Варіант № 17

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 12x_3 \rightarrow \min_{x \in \Omega}, \quad \Omega: f_1 = x_3 - x_1x_2 = 0$$

Варіант № 18

Методом підстановки знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = x_1 x_2 - 4x_3 \rightarrow \min_{x \in \Omega}, \quad \Omega: \begin{cases} f_1 = 3x_1 - x_2 + 2 = 0 \\ f_2 = x_3 - 2x_1 = 0 \end{cases}$$

Варіант № 19

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = x_1 x_2 - 4 \rightarrow \min_{x \in \Omega}, \quad \Omega: \{f_1 = 3x_1 - x_2 + 2 = 0\}$$

Варіант № 20

Методом підстановки знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 24x_3 \rightarrow \min_{x \in \Omega}, \quad \Omega: f_1 = x_3 - x_1 x_2 = 0$$

Варіант № 21

Методом підстановки знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 7x_3 \rightarrow \min_{x \in \Omega}, \quad \Omega: f_1 = x_3 - x_1 x_2 = 0$$

Варіант № 22

Методом підстановки знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 15x_3 \rightarrow \min_{x \in \Omega}, \quad \Omega: \begin{cases} f_1 = x_1 - x_2 = 0 \\ f_2 = x_3 - x_1 x_2 = 0 \end{cases}$$

Варіант № 23

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_3 \rightarrow \min_{x \in \Omega}, \quad \Omega: \begin{cases} f_1 = x_1 + x_2 - 3 = 0 \\ f_2 = x_2 + x_3 - 1 = 0 \end{cases}$$

Варіант № 24

Методом підстановки знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = 2x_1 x_3 + 7x_2^2 - x_1 \rightarrow \min_{x \in \Omega}, \quad \Omega: \begin{cases} f_1 = x_1 + x_2 - 4 = 0 \\ f_2 = x_2 - x_3 - 2 = 0 \end{cases}$$

Варіант № 25

Методом підстановки знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 12x_3 \rightarrow \min_{x \in \Omega}, \quad \Omega: f_1 = x_3 - x_1 x_2 = 0$$

Варіант № 27

Методом підстановки знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = x_1 x_2 - 4 \rightarrow \min_{x \in \Omega}, \quad \Omega: f_1 = 3x_1 - x_2 + 2 = 0$$

Варіант № 28

Методом підстановки знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_3 \rightarrow \min_{x \in \Omega}, \quad \Omega: f_1 = x_3 - x_1 x_2 = 0$$

Варіант № 29

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = e^{x_1 x_2} \rightarrow \min_{x \in \Omega}, \quad \Omega: \{f_1 = x_1 + x_2 - a = 0\}$$

Варіант № 30

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 27x_3 \rightarrow \min_{x \in \Omega}, \quad \Omega: f_1 = x_3 - x_1 x_2 = 0$$

Індивідуальні завдання з теми «Багатовимірні задачі при двобічних обмеженнях змінних»

Варіант № 1

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = 2x_1^3 + x_1 x_2^2 + 5x_1^2 + x_2^2 \quad \Omega: \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,5$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = [0,7 \quad 0]$.

Варіант № 2

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = 2x_1^3 + x_1 x_2^2 + 5x_1^2 + x_2^2 \quad \Omega: \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,5$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = [0,7 \quad -0,3]$.

Варіант № 3

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = 2x_1^3 + x_1 x_2^2 + 5x_1^2 + x_2^2 \quad \Omega: \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,1$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = [0,45 \quad 0,2]$.

Варіант № 4

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 - 3x_1 - 6x_2 \quad \Omega: \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,5$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = [2 \ 4]$.

Варіант № 5

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 - 3x_1 - 6x_2 \quad \Omega: \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,5$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = [0,2 \ 2]$.

Варіант № 6

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 - 3x_1 - 6x_2 \quad \Omega: \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,1$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = [-1 \ 3,5]$.

Варіант № 7

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 - 3x_1 - 6x_2 \quad \Omega: \begin{bmatrix} -15 \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,1$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = [0,5 \ 1,6]$.

Варіант № 8

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 - 3x_1 - 6x_2 \quad \Omega: \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,01$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = [2 \ 1]$.

Варіант № 9

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 - 3x_1 - 6x_2 \quad \Omega: \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,01$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = [0,5 \ 1,6]$.

Варіант № 10

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 - 3x_1 - 6x_2 \quad \Omega: \begin{bmatrix} -15 \\ 3,5 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -0,5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,01$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = [-1 \ 4]$.

Варіант № 11

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^2 - 2x_1 x_2 - 3x_1 + 2x_2 \quad \Omega: \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,03$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = [0,7 \ -0,1]$.

Варіант № 12

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^2 - 2x_1 x_2 - 3x_1 + 2x_2 \quad \Omega: \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,4$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = [1,2 \ 0,8]$.

Варіант № 13

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^2 - 2x_1 x_2 - 3x_1 + 2x_2 \quad \Omega: \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,2$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = [1,2 \ 0,8]$.

Варіант № 14

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^2 - 2x_1 x_2 - 3x_1 + 2x_2 \quad \Omega: \begin{bmatrix} 2 \\ 0,1 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,01$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = [3 \ 0,5]$.

Варіант № 15

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^2 - 2x_1 x_2 - 3x_1 + 2x_2 \quad \Omega: \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,01$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = [0,1 \ 1]$.

Варіант № 16

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 15x_1x_2 \quad \Omega: \begin{bmatrix} -2 \\ 4,8 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 5,3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,5$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = [5,3 \quad 4,8]$.

Варіант № 17

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 15x_1x_2 \quad \Omega: \begin{bmatrix} -2 \\ 3,2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4,9 \\ 5,5 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,1$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = [4,5 \quad 5,5]$.

Варіант № 18

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 15x_1x_2 \quad \Omega: \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 3,2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,5$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = [0,2 \quad 6,5]$.

Варіант № 19

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 12x_1x_2 \quad \Omega: \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,3$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = [3,8 \quad 4,1]$.

Варіант № 20

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 12x_1x_2 \quad \Omega: \begin{bmatrix} -2 \\ 4,2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 3,5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,01$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = [3 \quad 4,3]$.

Варіант № 21

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 12x_1x_2 \quad \Omega: \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 3,9 \\ 4 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,01$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = [3,8 \quad 3,9]$.

Варіант № 21

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 12x_1x_2 \quad \Omega: \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 3,9 \\ 4 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,01$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = [3,8 \quad 3,9]$.

Варіант № 22

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 9x_1x_2 \quad \Omega: \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,2$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = [2,8 \quad 3,1]$.

Варіант № 23

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 9x_1x_2 \quad \Omega: \begin{bmatrix} 2,5 \\ 2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 2,8 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,02$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = [3,3 \quad 2,6]$.

Варіант № 24

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 9x_1x_2 \quad \Omega: \begin{bmatrix} 0 \\ 3,2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 2,8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,01$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = [2 \quad 4]$.

Варіант № 25

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_1x_2 \quad \Omega: \begin{bmatrix} -2 \\ 1,8 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 3,5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,2$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = [2,01 \quad 1,9]$.

Варіант № 26

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_1x_2 \quad \Omega: \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1,8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,2$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = [1,5 \quad 1,6]$.

Варіант № 27

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_1x_2 \quad \Omega: \begin{bmatrix} 2,1 \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 3 \\ 1,7 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,01$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = [2,5 \ 1]$.

Варіант № 28

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2 \quad \Omega: \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,4$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = [0,7 \ 1,3]$.

Варіант № 29

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2 \quad \Omega: \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 0,9 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,01$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = [0,7 \ 0,5]$.

Варіант № 30

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2 \quad \Omega: \begin{bmatrix} 1,3 \\ -2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 0,8 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,01$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = [1,5 \ 0,7]$.

Список джерел

1. Самойленко М. І. Математичне програмування. / М. І. Самойленко. – Харків : Основа, 2002. – 424с.
2. Зайченко Ю. П. Исследование операций: Учеб. пособие для студентов вузов. / Ю. П. Зайченко. – Киев : Вища школа., 1989, – 392с.
3. Кузнецов Ю. Н. Математическое программирование. / Ю. Н. Кузнецов, В. И. Кузубов, А. В. Волощенко. – М. : Высш.шк., 1980.
4. Бережная Е. В. Математические методы моделирования экономических систем. / Е. В. Бережная. – М. : Финансы и статистика, 2001.
5. Красс М. С. Математические методы и модели для магистрантов экономики: учебное пособие. / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – СПб.: Питер, 2006. – 496 с.
6. Лагоша Б. А. Оптимальное управление в экономике. / Б. А. Лагоша. – М.: Финансы и статистика, 2003.
7. Зайченко Ю. П. Исследование операций. Сборник задач. / Ю. П. Зайченко, С. А. Шумилова. – Киев. :Вища школа, 1990. – 239с.
8. Плис А. И. Математический практикум для экономистов и инженеров: Учебное пособие. / А. И. Плис, Н. А. Сливина. – М.: Финансы и статистика, 1999.
9. Монахов А. В. Математические методы анализа экономики. / А. В. Монахов. – СПб.: Питер, 2002. – 176с.
10. Конюховский П. В. Математические методы исследования операций в экономике. / П. В. Конюховский. – СПб.: Питер, 2002.
11. Методичні вказівки до самостійного вирішення задач та виконання розрахункових завдань з курсу «Математичного програмування». ХДАМГ; уклад. : М. І. Самойленко, Г. В. Білогурова, О. М. Штельма, І. О. Гавриленко. – Харків. : 2006.

Навчально-виробниче видання

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
до самостійної роботи і виконання
розрахунково-графічної та практичної роботи

з дисципліни

«ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ»

*(для студентів 2 курсу денної форми навчання
освітнього рівня «бакалавр» спеціальності
126 – Інформаційні системи та технології)*

Укладачі: **ШТЕЛЬМА** Ольга Миколаївна,
МАКОГОН Наталья Вікторівна

Відповідальний за випуск *М. В. Булаєнко*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *К. А. Алексанян*

План 2016, поз. 415 М

Підп. до друку 13.04.2016. Формат 60х84/16.

Друк на різнографі. Ум. друк. арк. 0,7

Тираж 50 пр. Зам. №

Виконавець і виготовлювач:

Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.

Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:

ДК 5328 від 11.04.2017.